ALGEBRA LINEAL
Taller unidad I
MATRICES-SISTEMAS

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Martha C. Moreno

Agosto de 2014

1. Considere las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad F^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$

$G^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

En caso de ser posible efectuar las siguientes operaciones:

a) $2ABC - E^t$

b) $tr(D - 3E)$

c) $2A^t + C$

d) $(2E^t - 3D^t)^t$

e) $AB + C$

f) $tr(C^tA^t + 2E^t)$

g) $D - 2I_3$

h) FG^2

i) $(2F)^{-1}(G^t)^{-1}$

** $tr(M)$ representa la traza de la matriz cuadrada M, si $M = (m_{ij})_{n\times n}$,entonces: $tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$

2. Multiplicación de matrices

   a) Encontrar k de tal manera que las matrices: $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$ conmuten.

   b) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ encontrar $B_{2\times 2} \neq \oslash$ y $B_{2\times 2} \neq I$ talque A y B conmuten.

   c) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ encontrar $B_{2\times 2} \neq \oslash$ talque $AB = \oslash$.

   d) Sean $p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 3$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, determinar $p(A)$.

   e) Considere las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y
   $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
   Calcule AB y AC compare y analice.

   f) Encontrar una matriz $A_{2\times 2}$, con $A \neq I$ y $A \neq \oslash$ tal que $A^2 = A$

   g) Encontrar una matriz $A_{2\times 2}$, con $A \neq I$ tal que $A^2 = I$

   h) Determinar condiciones para w, x, y, z tales que $MN = NM$ con $M = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Clases de matrices
   Clasifique las proposiciones como verdaderas o falsas. JUSTIFIQUE (si es verdadero demuestre si es falsa encuentre un contraejemplo)

   a) Si A y B son matrices simétricas del mismo tamaño y conmutan, entonces AB es simétrica.

   b) Si A y B son matrices $n \times n$, A simétrica y B antisimétrica, entonces $A + B$ es antisimétrica.

   c) Sea C una matriz $n \times m$, entonces la matriz C^tC es simétrica.

   d) Si A y B son matrices ortogonales, entonces AB es ortogonal.

   e) Si A y B son idempotentes y conmutan, entonces AB es idempotente.

f) Sea $w_{n\times 1}$ talque $w^t w = 1$, se define: $H = I_n - 2ww^t$, entonces H es simétrica y ortogonal.

g) La matriz: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es nilpotente.

4. Concepto de matriz Inversa-Propiedades

a) Demostrar que si $ad - bc \neq 0$, entonces la inversa de la matriz: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

b) Usar la información dada y las propiedades para encontrar X

1) $(2X)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

2) $(I + 2X)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

3) $(5X^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

4) $2X\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t$

c) Demostrar que si una matriz cuadrada A satisface $A^2 - 3A + I = 0$, entonces: $A^{-1} = 3I - A$

d) Demostrar que si A es una matriz antisimétrica de tamaño $n \times n$, entonces la matriz: $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ es ortogonal.

5. Sistemas de Ecuaciones

a) Encontrar todos los valores de a, b, c para los cuales la matriz A es simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a - 2b + c & 2a + b + c \\ 3 & 5 & a + c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

b) Encontrar todos los valores de x, y, z para los cuales las matrices sean iguales:

$$\begin{bmatrix} x - 3y + 9 & y - z \\ 0 & 2x + y + z + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x - 5z & z - x - y + 7 \\ 0 & -3x + 3y - 2z \end{bmatrix}$$

c) Expresar la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de la matrices: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

d) Determine todas las soluciones del sistema lineal dado en cada caso.

i. $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 3y + z = 4 \\ -5x \quad - 2z = -5 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x + y + z + w = 6 \\ 2x + y - z \ = 3 \\ 3x + y \ + 2w = 6 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 2x - y + z + w - t = 0 \\ 3x + y - 2z + 2t = 0 \\ x - y + z + 2w - t = 0 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 5x + 7y + z = 0 \end{cases}$

e) Determinar los valores de las constantes dadas(a y/o b según el caso) para los cuales los sistemas de ecuaciones:

i. $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y + z = 7 \\ 3x + 6y + (a^2 - 5a + 9)z = a + 18 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} ax \ + bz = 2 \\ ax + ay + 4z = 4 \\ ay + 2z = b \end{cases}$

iii. $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y + az = b \end{cases}$ iv. $\begin{cases} (b-1)x - 2y + 2z = 0 \\ -x + by - 2z = 0 \\ -x - y + (b-1)z = 0 \end{cases}$

A. Tienen solución única.

B. Tienen infinitas soluciones.

C. Son inconsistentes.

f) Plantear y resolver los siguientes problemas:

I. Un mueblero fabrica sillas, mesas para café y mesas para comedor.Se necesitan 10 minutos para lijar una silla, 6 para pintarla y 12 para barnizarla. Se necesitan 12 minutos para lijar una mesa para café, ocho para pintarla y 12 para barnizarla. Se necesitan 15 minutos para lijar una mesa para comedor, 12 para pintarla y 18 para barnizarla. La mesa de lijado está disponible 16 horas a la semana, la mesa de pintura 11 horas a la semana y la mesa de barnizado 18 horas. ¿Cuántas unidades de cada mueble deben fabricarse por semana de modo que las mesas de trabajo se ocupen todo el tiempo disponible?

II. Un editor publica un posible éxito de librería en tres presentaciones distintas: libro de bolsillo, club de lectores y edición de lujo. Cada libro de bolsillo necesita un minuto para el cosido y 2 para el pegado. Cada libro para el club de lectores necesita 2 minutos para el cosido y 4 para el pegado. Cada libro en edición de lujo necesita 3 minutos para el cosido y 5 para el pegado. Si la planta de cosido está disponible 6 horas diarias y la planta de pegado 11 horas, ¿cuántos libros de cada presentación se pueden producir por día de modo que las plantas se aprovechen toda su capacidad?

III. Tres recipientes contienen agua. Si se vierte $\frac{1}{3}$ del contenido del primer recipiente en el segundo, y a continuaciòn $\frac{1}{4}$ del contenido del segundo en el tercero, y por ùltimo $\frac{1}{10}$ del contenido del tercero en el primero, entonces cada recipiente queda con 9 litros de agua. ¿Què cantidad de agua habìa originalmente en cada recipiente?

6. Miscelanea

a) Completar:

I. La matriz $D = \begin{pmatrix} 3 & x \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es imvolutiva si $x =$______

II. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ entonces $(A^2)^{-1} =$ ________________

III. Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño entonces $(A+B)^2 =$ ________________

IV. Si A y B son cuadradas del mismo tamaño y conmutan, entonces $(AB)^2 =$ ________________

V. La solución del sistema $\begin{cases} ax + by + cz = -5 \\ (a+2)x - (b-1)y - bz = 2 \\ (a-2)x - cy + (b+2)z = 6 \end{cases}$

es $x = 1, y = -1, z = 2$; si $a =$______ $b =$______ $c =$______

VI. $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & -9 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ \_\_ & -1 & -1 \\ \_\_ & \_\_ & -1 \end{pmatrix}$$

VII. Usando v : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} =$ ______________________

VIII. Sean A, $B \in M_{n\times n}$, supongamos que existe $P \in M_{n\times n}$ no singular talque $B = PAP^{-1}$ y si $A^5 = 2I$, entonces: $B^5 =$__________

IX. Sean $A, B \in M_{n\times n}$, A idempotente, entonces $(AB - ABA)^2 =$ __________

X. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 19 & 2 \end{pmatrix}$, Si $a =$______ $b =$______ $c =$ ______ $d =$______

Para las siguientes preguntas:
Marque A si I y II son verdaderas
Marque B si I es verdadera y II es falsa
Marque C si I es falsa y II es verdadera
Marque D si I y II son falsas

b) I) Sea $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, si $B^2 = \mathbf{0}_{n\times n}$ entonces $B = \mathbf{0}_{n\times n}$
II)Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ conmutan, entonces$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$
A)_____ B)______ C)______ D)______

c) I) Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}$ y $AB = AC$, entonces $B = C$
II)Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, si $AB = \mathbf{0}_{n\times n}$ y A es no singular entonces $B = \mathbf{0}_{n\times n}$
A)_____ B)______ C)______ D)______

d) En los enunciados $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$
I) Si A, B son no singulares entonces $A + B$ es no singular.
II)$(AB)^2 = A^2B^2$
A)_____ B)______ C)______ D)______

e) En las siguientes preguntas indique si el enuciado es verdadero o falso

I. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ con entradas reales y si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $tr(\alpha A+ B) = \alpha tr(A) + tr(B)$.
II. Todo sistema de ecuaciones lineales con igual número de incógnitas y de ecuaciones es consistente.
III. Todo sistema de ecuaciones lineales con más incógnitas que ecuaciones tiene infinitas soluciones.

IV. La matriz $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de las matrices: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

En las siguientes preguntas $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

V. Si $A^2 = A$ entonces $(A^t)^2 = A^t$.

VI. Si $AB = \mathbf{0}$, entonces $A = \mathbf{0}$ ó $B = \mathbf{0}$.

VII. Si A y B son matrices invertibles, entonces $A + B$ es invertible.

f) ¿ Bajo qué condiciones sobre $a \in \mathbb{R}$ exíste una matriz $X_{2\times 2}$ tal que $\left(X + \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & a^2 \end{bmatrix}\right)^2 = X^2 + \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & a^2 \end{bmatrix} X^t + I_2\right)^t$