ALGEBRA LINEAL
TALLER II DETERMINANTES

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Martha C. Moreno

Septiembre de 2014

1. Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Calcular:
   a. $det(A^t B^2)$ b. $det(C + 2D)$ c. $det(E)$ d. $det(F^{-3})$
   e. $det(C - 3I_2)$ d. $det(adj(A))$ e. $det(C^{-1}DC)$

2. Encontrar $x \in \mathbb{R}$ que satisfaga:

   a. $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$

   b. $det(A - xI) = 0$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$

3. Determinar si la proposicón es verdadera o falsa (JUSTIFICAR)
   $A, B \in M_{n\times n}$.

   a. $det(AA^t) = det(A^2)$
   b. Si A es antisimétrica, entonces $det(A) = 0$
   c. Si A es ortogonal, entonces $det(A) = 1$

d. Si $det(A) = 0$,entonces $A = 0$

e. $det(A + B) = det(A) + det(B)$

f. Si $A^k = O_{n\times n}$ para algún k entero positivo, entonces A es singular.

g. Si $det(A) = -2$,entonces el sistema $AX = 0$ tiene solamente la solución trivial.

h. Si A es idempotente, entonces $det(A) = 0$

i. Si $B = PAP^{-1}$ y P es no singular, entonces $det(A) = det(B)$

j. Si A y B son matrices no singulares, entonces $A + B$ es no singular.

k. $det(AB) = det(BA)$

l. M y N son matrices 3×3 tales que $det(2M^{-1}N) = 12$ y $det(N) = 3$, entonces $det(M) = \frac{1}{2}$

m. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ s & t & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & b & t \\ x & a & s \\ z & c & u \end{vmatrix}$

n. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$, entonces $\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 3x & 3y & 3z \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = -18$

4. Completar:

a. El sistema: $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$ Tiene única solución si $\alpha \in \{$ ____________________ $\}$

b. Si $det(A) = \frac{3}{5}$ y $AB = O$, entonces $B =$ ____________________

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & c & c \\ c & c & c \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ es singular si c= ____________________

d. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 3$, y si $B = \begin{pmatrix} 4u & 2a & -p \\ 4v & 2b & -q \\ 4w & 2c & -r \end{pmatrix}$, entonces: $det(2B^{-1}) =$ ____________________

e. Si $A^k = O$ (nilpotente) entonces $\left|A\right| =$ ____________________

f. $A_{5\times 5}$ es antisimétrica entonces $\left|A\right| =$ ____________________

g. si A y B son matrices 3×3 tal que $\left|2A^{-1}\right| = 6$ y $\left|A^t(2B)^{-1}\right| = 18$, entonces $\left|A^2B^t\right| =$ ____________________

h. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es no singular entonces $|(adjA)| =$ ____________________

5. sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y suponga que $det(A) \neq 0$

a. Muestre que $det(adj(A)) = det(A)^{n-1}$.

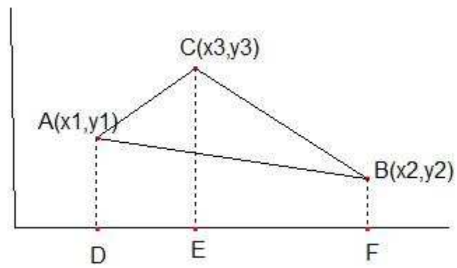
b. Calcule $adj(adj(A))$ en términos de A.

c. Encuentre una matriz A tal que $adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

¿ A es única ?

APLICACIONES

6. Considere la siguiente figura:



Demostrar que el área del triángulo ABC es: $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

Sug: $Area(ABC) = Area(ADEC) + Area(CEFB) - Area(ADFB)$

7. Usando la adjunta encontrar la inversa de la matriz: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

8. Usando la regla de cramer resolver el sistema: $\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 11x + y + 2z = 3 \\ x + 5y + 2z = 1 \end{cases}$

9. Encontrar X de tamaño 3×3 talque:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \quad X \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$