FAVOR USAR AUDÍFONOS PARA EVITAR ECO.
GRACIAS.

V espacio vectorial

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$.

CONJUNTO GENERADOR: $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$

$\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \rangle := \{\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$

$= V$

EN GENERAL: $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \rangle \leq V$

EJ ① $V = \mathbb{R}^3$ $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$\left[\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\} \right]$

INDEPENDENCIA LINEAL: $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ son linealmente independientes ssi

$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}_V$ entonces $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$

$1 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0}_V$

$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ NO es linealmente indep.

BASE: $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$ conjunto de generadores LINEALMENTE INDEPENDIENTES

TEOREMA Todo espacio vectorial tiene una base

(Una lema de Zorn - Axioma de Elección)

CLAVE: Una base es un CONJUNTO MAXIMAL de vectores linealmente INDEPENDIENTE:

MAXIMAL: Con respecto a $\subseteq$:

Si $\{\vec{v_1},..,\vec{v_n}\} \subsetneq B \subseteq V$, entonces B No es linealmente independiente

¿$\{\vec{0}\}$ es linealmente independiente?

¿, $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$, IMPLICA $\alpha = 0$? NO.

$\alpha = 1$: $\alpha \neq 0$, $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$\phi \subseteq V$ es linealmente independiente: SI NO:

EXISTIRÁN $\vec{v_1},..,\vec{v_n} \in \phi$ (contradicción) y $\alpha_1 \neq 0,.., \alpha_n \neq 0$ $\in \mathbb{R}$ tales que $\alpha_1 \vec{v_1} + ... + \alpha_n \vec{v_n} = \vec{0}$.

ϕ Es BASE de $\langle 0 \rangle = \{0\}$.

BASE: Conjunto MINIMAL de generadores

TEOREMA $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0} \in V$ son LINEALMENTE DEPENDIENTES ssi un vector es múltiplo del otro.

DEMOSTRACIÓN: ($\Leftarrow$) Supongamos que EXISTE $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$. Como $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\alpha \neq 0$.

$\alpha \vec{v} + (-1)\vec{u} = \vec{0}$. Luego $\vec{u}, \vec{v}$ son L. DEPENDIENTES.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\vec{u}, \vec{v}$ son L. DEPENDIENTES, luego existen $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$$

$\alpha \vec{u} = (-\beta)\vec{v}$, luego $\vec{u} = \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)\vec{v}$

Análogamente, $\beta\vec{v} = (-\alpha)\vec{u}$, luego $\vec{v} = \left(\frac{-\alpha}{\beta}\right)\vec{u}$ ☑

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ son LINEALMENTE DEPENDIENTES ssi existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\vec{v}_i$ es combinación lineal de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}$ (EJERCICIO)

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Dado V espacio vectorial y $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ BASES de V, entonces $n = k$ ☑

DIMENSIÓN: Cantidad de vectores que hay en cualquier base de V.

$\dim(V)$: dimensión de V

$\boxed{\text{EJEMPLOS}}$ ① $V = \mathbb{R}^2$ $B_c = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ forma una base para $\mathbb{R}^2$. $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

② $V = \mathbb{R}^2$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} =: B_1$

Si $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$. $\alpha = 1$ y $-\alpha = 1$

Es decir: $\alpha = 1 = -1$ (Contradicción)

Por lo tanto, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ es linealmente independiente

Veamos que es un conjunto de generadores:

Sea $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, luego necesitamos ver que el siguiente sistema es CONSISTENTE

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} \qquad \left.\begin{matrix} \alpha + \beta = a \\ \alpha - \beta = b \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 1(1) = -2 \neq 0$$

Luego el sistema anterior TIENE SOLUCIÓN y ÚNICA

ANALIZANDO $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{e_1} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad \vec{e_2} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1}, \ldots, \quad \vec{e_i} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \to \text{FILA } i$$

$$e_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_i}, \ldots, \vec{e_n}\}$$

¿CONJUNTO DE GENERADORES?

Sea $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + \ldots + a_i \vec{e_i} + \ldots + a_n \vec{e_n}$$

¿LINEALMENTE INDEPENDIENTES?

Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\underbrace{\alpha_1 \vec{e_1} + \dots + \alpha_n \vec{e_n}}_{= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}} = \vec{\underline{0}}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$

Es decir, $\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ son

LINEALMENTE INDEPENDIENTE.

Por lo tanto, $B_C := \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ es una base para $\mathbb{R}^n$ [BASE CANÓNICA].

$\dim(\mathbb{R}^n) = n.$

PREGUNTA SANTIAGO: Si $\dim(V) = n$, entonces un conjunto generador MINIMAL tiene n vectores.

Demostración: Sea $S := \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}\}$ conjunto de GENERADOR MINIMAL.

MINIMAL: $T \subsetneq S$, entonces T YA NO genera a V.

CLAVE: Dado S GENERADOR de V:

$T \subseteq S$ tal que T es base de $\langle S \rangle = V$

T genera a V

Por la MINIMALIDAD de S: $T = S$.