FAVOR USAR AUDÍFONOS PARA EVITAR ECO EN EL HANGOUT. GRACIAS.

PROPOSICIÓN 4 (TEOREMA DE LA DEDUCCIÓN)

T $\mathcal{L}$-teoría, φ $\mathcal{L}$-sentencia, ψ $\mathcal{L}$-fórmula.

$T \vdash \varphi \to \psi$ ssi $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

DEMOSTRACIÓN:

$(\Rightarrow)$

1.	$\vdots$ $\varphi \to \psi$	$\}$ T-deducción de $\varphi \to \psi$
2.	φ	Premisa adicional
3.	ψ	MP 1, 2

$\square$

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Sea $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ una deducción de ψ, con premisas en $T \cup \{\varphi\}$. Luego $\varphi_n = \psi$.

A ver: $T \vdash \varphi \to \varphi_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$

$i = 1$ φ_1 es axioma o premisa en $T \cup \{\varphi\}$

(a) φ_1 es AXIOMA ó premisa en T

1.	φ_1	Axioma o premisa en T
2.	$\neg\varphi \vee \varphi_1$	Expansión 1.
[2'.	$\varphi \to \varphi_1$	Conversión]

Luego en este caso, $T \vdash \varphi \to \varphi_1$

(b) Si $\varphi_i = \varphi$.

1. $\underbrace{\neg\varphi \vee \varphi}$ Axioma Proposicional

[1? $\varphi \to \varphi$ Convención]
$\varphi \to \varphi_i$

En este caso, $\vdash \underline{\varphi \to \varphi_i}$, en particular $\underline{T \vdash \varphi \to \varphi_i}$

$\boxed{\text{HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN: Para } 1 \leq j < i,\ T \vdash \varphi \to \varphi_j \text{. A ver: } T \vdash \varphi \to \varphi_i}$

(a) Si φ_i es AXIOMA ó precisa en $T \cup \{\varphi\}$,

Ver Caso $i=1$ $\square$

(b) Si φ_i se obtuvo de $\{\varphi_j : j < i\}$ usando reglas de inferencia:

Caso 1: Si NO se usó introducción del existencial, la regla usada es PROPOSICIONAL.

Tenemos que $\{\varphi_j : j < i\} \boxed{\vdash} \varphi_i$. Por lo tanto $\boxed{\{\varphi_j : j < i\} \models \varphi_i}$ (PROPOSICIONALMENTE). Luego

* $\boxed{\{\boxed{\varphi \to \varphi_j} : j < i\} \models \boxed{\varphi \to \varphi_i}}$ Si NO: habría una valuación v tal que $\boxed{v(\varphi \to \varphi_j) = 1}$ $(j < i)$ y $v(\varphi \to \varphi_i) = 0$. Luego $v(\varphi) = 1$ y $\boxed{v(\varphi_i) = 0}$.

Como $v(\varphi) = 1$ y $v(\varphi \to \varphi_j) = 1$, entonces $\boxed{v(\varphi_j) = 1}$

Para todo $j < i$.

Esto contradice que $\{\varphi_j : j < i\} \models \varphi_i$.

$$\left[\begin{array}{ll} 1. & \varphi \to \varphi_1 \\ \vdots & \vdots \\ i-1. & \varphi \to \varphi_{i-1} \end{array}\right] \Big\}$$ Hipótesis de Inducción: $\boxed{T-}$ deducciones de $\varphi \to \varphi_j$, $j < i$.

i, $\varphi \to \varphi_i$ $\quad \{\varphi \to \varphi_j : j < i\} \models \varphi \to \varphi_i$

$\boxed{\text{REGLA PROPOSICIONAL}}$

CASO 2: Si la regla usada en $\{\varphi_j : j<i\} \vdash \varphi_i$ fue introducción del EXISTENCIAL.

$\varphi_j : \varphi_1 \to \varphi_2$

$\varphi_i : \exists x \varphi_1 \to \varphi_2$ $\Big\}$ $\boxed{x \text{ NO es libre en } \varphi_2}$

PROPOSICIONALMENTE

$$(*) \quad \boxed{\varphi \to (\varphi_1 \to \varphi_2) \models \varphi_1 \to (\varphi \to \varphi_2)}$$ SI NO:

existiría una valuación v tal que

$v(\varphi \to (\varphi_1 \to \varphi_2)) = 1$ y $v(\varphi_1 \to (\varphi \to \varphi_2)) = 0$;

luego $v(\varphi_1) = 1$ y $v(\varphi \to \varphi_2) = 0$. Por lo tanto,

$v(\varphi) = 1$, $v(\varphi_2) = 0$. En ese caso, $v(\varphi_1 \to \varphi_2) = 0$.

Como $v(\varphi) = 1$, $v(\varphi \to (\varphi_1 \to \varphi_2)) = 0$ (↯)

1. $\varphi \to \varphi_j$ — Hipótesis de inducción, T-deducción de $\varphi \to \varphi_j$

1.' $\varphi \to (\underbrace{\varphi_1 \to \varphi_2}_{\varphi_j})$

2. $\varphi_1 \to (\varphi \to \varphi_2)$ Regla Proposicional (*)

3. $\exists x \psi_1 \to (\varphi \to \psi_2)$ Introd. Existencial 2.

x No es libre en $\varphi \to \psi_2$

4. $\varphi \to (\exists x \psi_1 \to \psi_2)$ Regla proposicional (*)

4.' $\varphi \to \psi_i$

Por lo tanto, por el principio de inducción matemática TRUNCADA, $T \vdash \varphi \to \varphi_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. En particular: $T \vdash \varphi \to \varphi_n$, es decir: $T \vdash \varphi \to \psi$ $\square$