FAVOR USAR AUDÍFONOS PARA EVITAR ECO.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Si $\dim V = n$ y $H \leq V$, $\dim H \leq n$

CLAVE: Vectores L.I. en $H$ son vectores L.I. en $V$.

$\boxed{\text{OBS}}$ $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

Si $H = \{\vec{0}\}$, $\dim H = 0 \leq n$ ✓

Si $H \neq \{\vec{0}\}$, existe $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \in H$.

Si $H = \langle \vec{v_1} \rangle$, $\dim H = 1 \leq n$.

Si $H \neq \langle \vec{v_1} \rangle$, existe $\vec{v_2} \notin \langle \vec{v_1} \rangle$ en particular $\vec{v_2} \neq \vec{v_1}$. Si $H = \langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle$, entonces $\dim H = 2 \leq n$.

Como en $H$, si $B \subseteq V$ tiene MÁS de $n$ vectores, entonces $B$ forma un conjunto L. Dependiente.

Ese proceso anterior se puede repetir a lo sumo $n$ veces. (si NO en $H$ habrían por lo menos $n+1$ vectores l. indep, que serían L. indep en $V$.

$\boxed{\text{HECHO}}$ Si $A = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}\} \subseteq V$ es un conjunto l. indep, EXISTE $B \supseteq A$ base para $V$.

CLAVE: Ver una base $B \subseteq V$ como un conjunto maximal de vectores linealmente indep.

Luego $V$ tendría una base $B$ con $> n$ elementos (Contradice que $\dim V = n$).

Por lo tanto, $\underline{\dim} H \leq n$ $\square$

$\boxed{\text{HECHO}}$ Si $\dim V = n$, $n$ vectores L. Indep ya forman una base.

DEMOSTRACIÓN: Sea $B = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ linealmente independientes. Para ver que $B$ es base, debemos ver que $\langle \vec{v_1}, \dots, \vec{v_n} \rangle = V$. Si NO, existiría $\vec{u} \in V$ tal que $\boxed{\vec{u} \notin \langle \vec{v_1}, \dots, \vec{v_n} \rangle}$

CLAVE: Ver que $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}, \vec{u}\}$ es L.I. indep.

$$\underbrace{\langle \vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}, \vec{u} \rangle}_{n+1} =: \underbrace{H}\leq \underbrace{V}$$

$$\underbrace{\dim H} = n+1 \leq n = \underbrace{\dim V} \quad (\Downarrow)$$

Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha_1 \vec{v_1} + \dots + \alpha_n \vec{v_n} + \boxed{\alpha_{n+1} \vec{u}} = \vec{0}$$

Si $\boxed{\alpha_{n+1} \neq 0}$, $\vec{u} = \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\right)\vec{v_1} + \dots + \left(\frac{-\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right)\vec{v_n}$

Luego $\vec{u} \in \langle \vec{v_1}, \dots, \vec{v_n} \rangle$ $(\Downarrow)$.

Por lo tanto, $\boxed{\alpha_{n+1} = 0}$. Luego

$\underbrace{\alpha_1 \vec{v_1} + \dots + \alpha_n \vec{v_n}} = \vec{0}$, Por tanto,

$\boxed{\alpha_1 = 0}, \dots, \boxed{\alpha_n = 0}$

Por lo tanto $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}, \vec{u}\}$ es L indep. $(\Downarrow)$

Luego $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de $V$ $\square$

EJ ① $V=\mathbb{R}^2$. ¿$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ forma una base para $\mathbb{R}^2$?

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ NO es Múltiplo de $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, luego son l. indep. $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ $\left(B_C = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}\right.$ es base para $\left.\mathbb{R}^2\right)$.

Por lo tanto, $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ forma una base para $\mathbb{R}^2$ $\square$

MATRIZ CAMBIO DE BASE

Sea $B_1 := \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ y $B_2 := \{\vec{v_1}', \dots, \vec{v_n}'\}$ bases para $V$.

GENERADORES: Dado $\vec{u} \in V$, EXISTEN escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que
$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v_1} + \dots + \alpha_n \vec{v_n}$ }

INDEP. LINEAL: Garantizan que esos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ SON ÚNICOS.

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix} =: [\vec{u}]_{B_1}.$$

$\mathcal{B}_2$ es base: Existen únicos escalares

$\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left.\vec{u} = \beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_n \vec{v}_n\right\}$$

$$[\vec{u}]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

EJEMPLO ① $V = \mathbb{R}^2$ $\mathcal{B}_c = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Como $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ NO es múltiplo de $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, (¿POR QUÉ?)

entonces son l. independientes; como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$,

entonces $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ forma una base

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \alpha = ?, \quad \beta = ?$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \beta &= 1 \\ 3\alpha + 2\beta &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \alpha = 2/5 \qquad \beta = -3/5$$

$$\left.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \alpha = ?, \quad \beta = ?$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \beta &= 0 \\ 3\alpha + 2\beta &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \alpha = \frac{1}{5}, \quad \beta = \frac{1}{5}$$

$$\left.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 3\left( \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{3}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + 2 \left( \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\frac{6}{5}+\frac{2}{5}\right)\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + \left(-\frac{9}{5}+\frac{2}{5}\right)\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{8}{5}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} - \frac{7}{5}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_{B} = \begin{bmatrix}8/5\\-7/5\end{bmatrix}$$

$$A_{Bc} = \begin{bmatrix}2/5 & 1/5\\-3/5 & 1/5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_B \quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_B$$

$$A\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_{Bc} = \begin{bmatrix}2/5 & 1/5\\-3/5 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6/5+2/5\\-9/5+2/5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8/5\\-7/5\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_{Bc} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_B$$

**TEOREMA** Sean $B=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$, $C:=\{\vec{v}_1',\dots,\vec{v}_n'\}$ bases de $V$

Sea $A := \begin{bmatrix}[\vec{v}_1]_C & \cdots & [\vec{v}_n]_C\end{bmatrix}$ MATRIZ DE TRANSICIÓN DE LA BASE B A LA BASE C.

$$A[\vec{u}]_B = [\vec{u}]_C \quad \square$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $[\vec{u}]_B = \begin{bmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{bmatrix}$ $\left(\vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n\right)$

$$A[\vec{u}]_B = \left[ [\vec{v_1}]_C \cdots [\vec{v_n}]_C \right] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \vec{v_i} = \alpha_{1i} \vec{v_1'} + \dots + \alpha_{ni} \vec{v_n'} \right\} \quad [\vec{v_i}]_C = \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_{11} + \dots + \alpha_n \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_1 \alpha_{n1} + \dots + \alpha_n \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v_1} + \dots + \alpha_n \vec{v_n} \qquad [\vec{u}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1 \left( \alpha_{11} \vec{v_1'} + \dots + \alpha_{n1} \vec{v_n'} \right) + \dots + \alpha_n \left( \alpha_{1n} \vec{v_1'} + \dots + \alpha_{nn} \vec{v_n'} \right)$$

$$= \underbrace{(\alpha_1 \alpha_{11} + \dots + \alpha_n \alpha_{1n})}_{\beta_1} \vec{v_1'} + \dots + \underbrace{(\alpha_1 \alpha_{n1} + \dots + \alpha_n \alpha_{nn})}_{\beta_n} \vec{v_n'}$$

$$\beta_1 \vec{v_1'} + \dots + \beta_n \vec{v_n'}$$

Por lo tanto $[\vec{u}]_C = \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_{11} + \dots + \alpha_1 \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_1 \alpha_{n1} + \dots + \alpha_n \alpha_{nn} \end{bmatrix}$

$$= A[\vec{u}]_B \quad \square$$