Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas

ALGEBRA LINEAL
Taller unidad IV -V
Transformaciones Lineales-Valores y Vectores Propios
Martha C. Moreno

2014

I. Indicar cuáles de las siguientes transformaciones son lineales, si lo son, para dichas transformaciones encontrar: una base para el núcleo y una para la imagen , el rango y la nulidad. Además verificar si las transformaciones son inyectivas o sobreyectivas, e indicar si son o no un isomorfismo.

1. $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3; T(x, y, z) = (x - y, x + z, 2x - y + z)$.
2. $T : \mathbf{P}_2 \longrightarrow \mathbf{P}_3; T[p(x)] = xp(x)$.
3. $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}; T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \bullet \mathbf{z}$ donde $\mathbf{z} = (1, -1, 1)$ es un vector fijo.
4. $T : V \longrightarrow V; T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, donde $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ es un vector fijo de V.
5. $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}$; $T(A) = tr(A)$.
6. $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}$; $T(X) = XA - AX$, donde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
7. $T : \mathcal{M}_{3\times 3} \longrightarrow \mathcal{M}_{3\times 3}$; $T(A) = A^t + A$
8. $T : \mathcal{M}_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$; $T(A) = \rho(A)$ (rango de A)

II. En cada caso suponer que T es transformación lineal

1. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es tal que $T \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, Hallar $T \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.
2. Si $T : \mathbf{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $T(x + 2) = 1$, $T(1) = 5$, $T(x^2 + x) = 0$. Obtener $T(2 - x + 3x^2)$.
3. $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}$; $T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$, $T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$, $T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 = T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; encontrar $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})$.
4. $T : V \longrightarrow V$ y talque $T(\mathbf{v} + 2\mathbf{w}) = 3\mathbf{v} - \mathbf{w}$ y $T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 2\mathbf{v} - 4\mathbf{w}$ determinar $T(\mathbf{v})$ y $T(\mathbf{w})$.

III. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal y sean $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ vectores de V.

1. Si el conjunto $\{T(\mathbf{v}_1), ..., T(\mathbf{v}_n)\}$ es linealmente independiente en W, demostrar que $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente en V.
2. Encontrar $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de tal forma que el recíproco del apartado anterior sea falso.
3. Si $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ genera a V, entonces $\{T(\mathbf{v}_1), ..., T(\mathbf{v}_n)\}$ genera $Im(T)$.

IV. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal tal que $\dim(V) = \dim(W)$, demostrar:

1. Si T es inyectiva, entonces T es sobre.
2. si T es sobre, entonces T es inyectiva.

V. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como:
$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y-z \end{bmatrix}$
Determine la matriz A que representa a T en las bases canónicas y:

1. Encontrar la nulidad y el rango de T
2. Clasificar T como inyectiva o sobreyectiva.
3. Calcule $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ utilizando la definición de T y la matriz A

VI. Para las siguientes transformaciones lineales encontrar la matriz A que las representan en las bases canónicas y determinar para cada una los valores y vectores propios y decidir si la matriz A es o no diagonalizable, en caso afirmativo diagonalizarlas.

1. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+2y \\ 3x+3y \end{pmatrix}$
2. $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,definida por: $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+z \\ x+3y-z \\ -z \end{pmatrix}$
3. $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$,definida por: $T(ax^2+bx+c) = (2a+b+c)x^2 + (2a+b-2c)x - (a+2c)$

VII. Encontrar $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{10}$

VIII. Si A es una matriz idempotente, ¿ cuáles son los valores posibles para los valores propios de A ? Justificar la respuesta.

IX. a. Si λ es un valor propio de A asociado a el vector propio X, demostrar que λ^k es un valor propio de A^k asociado a X.

b. Calcular los valores propios de A^3, donde $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

X. Si λ es un valor propio de una matriz A no singular, demuestre que $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de A^{-1}.

XI. Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es semejante a $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$entonces.

a. $det(A) = det(B)$.

b. $tr(A) = tr(B)$. Sugerencia: si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ entonces $tr(AB) = tr(BA)$

c. A y B tienen el mismo polinomio característico.

d. A y B tienen los mismos valores propios.

e. A^n es semejante a B^n.

f. A^{-1} es semejante a B^{-1}

g. rango(A) = rango(B) .
Sugerencia: rango(A) = rango(AT) = rango(UA) si U y T son NO singulares.