UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
TALLER 3 LÓGICA MATEMÁTICA - I 2016

Profesor: Pedro Zambrano

---

1. Si $\mathfrak{M}$ es un conjunto maximal de fórmulas bien formadas finitamente satisfactible, demuestre que para toda fórmula bien formada α se tiene que $\alpha \in \mathfrak{M}$ si y sólo si $\neg\alpha \notin \mathfrak{M}$.

2. Un conjunto de fórmulas bien formadas Σ satisfactible se dice *completa* si dada cualquier fórmula bien formada α tenemos que $\Sigma \models \alpha$ o $\Sigma \models \neg\alpha$. Demuestre que dado cualquier conjunto satisfactible Σ' de fórmulas bien formadas, existe $\Sigma \supseteq \Sigma'$ conjunto de fórmulas bien formadas completo (sugerencia: demuestre que hay un conjunto maximal satisfactible $\Sigma \supseteq \Sigma'$ y demuestre que la maximalidad implica que Σ es completo).

3. Dados Σ conjunto de fórmulas bien formadas y α, β fórmulas bien formadas, demuestre o refute con un contrajemplo:
   (a) Si $\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta$ entonces $\Sigma \vdash \alpha$ y $\Sigma \vdash \beta$.
   (b) Si $\Sigma \vdash \alpha$ y $\Sigma \vdash \beta$ entonces $\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta$
   (c) Si $\Sigma \vdash \alpha \vee \beta$ entonces $\Sigma \vdash \alpha$ o $\Sigma \vdash \beta$.
   (d) Si $\Sigma \vdash \alpha$ o $\Sigma \vdash \beta$ entonces $\Sigma \vdash \alpha \vee \beta$

4. Demuestre que $\Gamma \not\models \alpha$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es satisfactible.

5. Sea (*) la afirmación: si $\Sigma \models \alpha$ entonces existe $\Sigma_0 \subseteq_{finito} \Sigma$ tal que $\Sigma_0 \models \alpha$, Σ es un conjunto de fórmulas bien formadas y α es una fórmula bien formada. Demuestre que si $(*)$ vale para todo Σ y todo α, entonces vale el teorema de compacidad en el cálculo proposicional clásico (sugerencia: demuestre el contrarrecíproco).