UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
EJERCICIOS 1 TEORIA DE MODELOS- I 2016

Profesor: Pedro Zambrano

En esta lista de ejercicios, suponga que L es un lenguaje de primer orden.

1. Sea $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ una familia de L-subestructuras de una L-estructura $\mathfrak{A}$. Demuestre que si $\bigcap_{i \in I} A_i$ no es vacío, sobre dicha intersección se puede definir una L-estructura.

2. Sean $\mathfrak{A}$ una L-estructura y $\emptyset \neq S \subseteq A$. Defina
$$\langle S \rangle := \bigcap \{B : B \text{ es el universo de una } L\text{-subestructura de } \mathfrak{A} \text{ que contiene a } S\}.$$
Demuestre que $\langle S \rangle$ es una L-estructura y que es una L-subestructura de $\mathfrak{A}$ que contiene a S. $\langle S \rangle$ se denomina *L-estructura generada por S*. Demuestre además que
$$\langle S \rangle = \{\tau(a_1, \cdots, a_n) : \tau(x_1, \cdots, x_n) \text{ es } L\text{-término y } a_1, \cdots a_n \in S\}.$$
Demuestre que $\langle S \rangle$ es la menor (en término de ser L-subestructura) L-estructura que contiene a S.

3. Sea $\{\mathfrak{A}_i : i < \alpha\}$ una familia $\subset$-creciente de L-subestructuras de una L-estructura $\mathfrak{A}$ (i.e., si $i < j < \alpha$ entonces $\mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{A}_j$). Entonces $\bigcup_{i<\alpha} A_i$ es el universo de una L-estructura (unívocamente definida) que es el $\subset$-supremo de esa familia.

4. Sea $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un L-homomorfismo. Demuestre que para todo $\tau(x_1, \cdots x_n)$ L-término y para todo $a_1, \cdots a_n \in A$, $h(\tau^{\mathfrak{A}}(a_1, \cdots a_n)) = \tau^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \cdots, h(a_n))$.

5. Demuestre que si $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ es una L-inmersión, entonces para toda $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ L-fórmula básica y para todo $a_1, \cdots a_n \in A$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \cdots a_n]$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi[h(a_1), \cdots h(a_n)]$.

6. Demuestre que si $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ es una L-inmersión, entonces para toda $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ L-fórmula existencial y para todo $a_1, \cdots a_n \in A$, $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \cdots a_n]$ implica que $\mathfrak{B} \models \varphi[h(a_1), \cdots h(a_n)]$.

7. Demuestre que si $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ es una L-inmersión, entonces para toda $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ L-fórmula universal y para todo $a_1, \cdots a_n \in A$, $\mathfrak{B} \models \varphi[h(a_1), \cdots h(a_n)]$ implica que $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \cdots a_n]$.

8. Sea L un lenguaje de primer orden contable y $\kappa \geq \aleph_0$ cardinal. Demuestre que hay a lo sumo 2^κ L-estructuras no isomorfas de tamaño κ.

9. Demuestre que el gráfico de la suma $D := \{(m, n, p) \in \mathbb{Z}^3 : m + n = p\}$ en $\mathbb{Z}$ no es definible en $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, \cdot)$. Sugerencia: Utilice el teorema fundamental de la aritmética para definir cierto automorfismo de $\mathfrak{A}$ que no fije D como conjunto.

10. Sea $\mathfrak{A}$ una L-estructura. Demuestre que los modelos de $Diag(\mathfrak{A}) := \{\varphi\ L\text{-sentencia básica} : (\mathfrak{A}, a)_{a \in A} \models \varphi\}$ son las estructuras $(\mathfrak{B}, h(a))_{a \in A}$ para L-inmersiones $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.