UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
EJERCICIOS 2 TEORIA DE MODELOS- II 2014

Profesor: Pedro Zambrano

En esta lista de ejercicios, suponga que L es un lenguaje de primer orden.

1. Demuestre que la relación $\equiv$ en la clase de L-estructuras es de equivalencia.
2. Demuestre que si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son L-estructuras finitas, si $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. ¿Ocurre lo mismo si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son infinitos? Justifique su respuesta.
3. (a) Sean $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ L-estructuras tales que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. ¿Se tiene que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$? Justifique su respuesta.
   (b) Sean $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ L-estructuras tales que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. ¿Se tiene que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$? Justifique su respuesta.
4. Demuestre que en las L-estructuras, $\prec$ es un orden parcial.
5. Demuestre que si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son L-estructuras, $\mathfrak{B}' := (\mathfrak{B}, a^{\mathfrak{B}'})_{a\in A} \models Th(\mathfrak{A}, a)_{a\in A}$ si y sólo si existe una L-inmersión elemental $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.
6. Demuestre que $\prec$ es cerrado bajo L-isomorfismos: i.e., Si $f_1 : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{B}_1$, $f_2 : \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{B}_2$ son L-isomorfismos tales que $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_2$ y $f_1 \subseteq f_2$, si $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_2$ entonces $\mathfrak{B}_1 \prec \mathfrak{B}_2$.
7. Demuestre que si $\{\mathfrak{A}_i : i < \alpha\}$ es una $\prec$-cadena creciente continua de L-estructuras (i.e., para todo $i < j < \alpha$ entonces $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}_j$ y si $i < \alpha$ es límite entonces $\mathfrak{A}_i = \bigcup_{k<i} \mathfrak{A}_k$) entonces $\bigcup_{i<\alpha} \mathfrak{A}_i$ es el $\prec$-supremo de $\{\mathfrak{A}_i : i < \alpha\}$.
8. Un orden parcial $(I, \leq)$ se dice *dirigido* si y sólo si para todo $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$. Demuestre que si $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ es una $\prec$-creciente (i.e., si $i < j$ entonces $\mathfrak{A} i \prec \mathfrak{A}_j$), entonces para todo $l \in I$ se tiene que $\mathfrak{A}_l \prec \bigcup_{i\in I} \mathfrak{A}_i$. Además, demuestre que $\bigcup_{i\in I} \mathfrak{A}_i = sup\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ (con el orden $\prec$).
9. Demuestre que si $\mathfrak{A}_i$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) son L-estructuras tales que $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \prec \mathfrak{A}_3$ y $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_3$, entonces $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_2$. Esta propiedad es llamada *coherencia*.
10. Sean $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ L-estructuras tales que $C \subseteq B$. Demuestre que existe una L-estructura $\mathfrak{A}'$ de cardinal $\leq |L| + |A| + \aleph_0$ tal que $C \subseteq \mathfrak{A}' \prec \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.
11. Demuestre que T_{ind} (la teoría de primer orden del grado aleatorio) es $\aleph_0$-categórica. Sugerencia: Use back and forth.
12. ¿Por qué falla el argumento usado para probar que ACF_p es λ-categórica para $\lambda > \aleph_0$ si se sigue para intentar una prueba (errónea) de que es $\aleph_0$-categórica?