UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
TALLER 5 LÓGICA MATEMÁTICA- I 2016

Profesor: Pedro Zambrano

---

1. Determine todas las subestructuras de $(\mathbb{N}, 0, 1, +)$, justificando su respuesta.

2. Sea $\mathcal{L} := \{<^2, f^1\}$. Demuestre que $\{a \in \mathbb{R} : f^{\mathcal{M}}$ es continua en $a\}$ es $\emptyset$-definible en $\mathcal{M} := (\mathbb{R}, <, f^{\mathcal{M}})$.

3. Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $\pi : M^{m+n} \to M^m$ la función proyección definida por $\pi(a_1, \cdots, a_m, a_{m+1}, \cdots, a_{m+n}) := (a_1, \cdots, a_m)$. Suponga que $S \subseteq M^{m+n}$ es definible en M mediante la $\mathcal{L}_A$-fórmula $\varphi(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots y_n)$. ¿Qué conjunto define $\exists y_1 \cdots \exists y_n \varphi(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots y_n)$? Justifique su respuesta.

4. Demuestre que si $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es un $\mathcal{L}$-isomorfismo de $\mathcal{L}$-estructuras, entonces para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ y todo $(a_1, \cdots, a_n) \in M^n$ se tiene que $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$ si y sólo si $\mathcal{N} \models \varphi(h(a_1), \cdots, h(a_n))$

5. Si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ ¿$\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$? Justifique completamente su respuesta.

6. Si $\langle \mathcal{M}_i : i < \lambda \rangle$ es una $\prec$-cadena creciente de L-estructuras de primer orden, demuestre que sobre $\bigcup_{i<\lambda} M_i$ se puede definir una L-estructura (que denotaremos por $\bigcup_{i<\lambda} \mathcal{M}_i$) tal que $M_j \prec \bigcup_{i<\lambda} \mathcal{M}_i$ para todo $j < \lambda$.

7. Si $\langle \mathcal{M}_i : i < \lambda \rangle$ es una $\prec$-cadena creciente de L-estructuras de primer orden tal que existe una L-estructura tal que $\mathcal{M}_j \prec \mathcal{N}$ para todo $j < \lambda$, demuestre que $\bigcup_{i<\lambda} \mathcal{M}_j \prec \mathcal{N}$.

8. Un orden parcial $\langle I, \leq \rangle$ se dice *dirigido* si dados $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$. Sea $\langle \mathcal{M}_i : i \in I \rangle$ un sistema dirigido de L-estructuras (i.e., si $i, j \in I$ son tales que $\imath \leq j$ entonces $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$), entonces $M_j \prec \bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i$ para todo $j \in I$ y si $\mathcal{N}$ es una L-estructura tal que $\mathcal{M}_j \prec \mathcal{N}$ para todo $j \in I$ entonces $\bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i \prec \mathcal{N}$.

9. Sean $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ L-estructuras tales que $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$ y $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$, demuestre que $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$.

10. Ejercicios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 Enderton 2a edición, pg. 99-100.

11. Ejercicios 3, 4 (a), 4 (b), 7, 8, 9, 10, 12, 20, 24 (a), 24 (b), 24 (c), 25, 27, 28, 29, 32 Judah, páginas 72-76.

12. Ejercicios 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 14 páginas 90-91 van Dalen 4a edición.

13. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo de característica 0 y $\mathcal{V} := (V, +, -(), 0; f_\alpha : \alpha \in \mathbb{F})$ un $\mathbb{F}$-espacio vectorial con base $B := \{v_n : n < \omega\}$, donde $0^{\mathcal{V}}$ se interpreta como el neutro de la suma en V, $+^{\mathcal{V}} : V \times V \to V$ se interpreta como la suma en V, $-()^{\mathcal{V}} : V \to V$ se interpreta como la función $-()^{\mathcal{V}}(v) := -v$ y $f_\alpha^{\mathcal{V}} : V \to V$ se interpreta como $f_\alpha^{\mathcal{V}}(v) := \alpha \cdot v$. Demuestre que B no es definible en $\mathcal{V}$.