SOLUCIÓN PARCIAL 1 LÓGICA MATEMÁTICA I-2016

Este documento NO presenta TODOS los detalles que ustedes debieron llenar, ni es la única forma de resolverlo, sólo es una guía de cómo pudo haberse desarrollado.

1 **(a)** Por inducción sobre $n \in \omega$.

$n=0$: $\Gamma_0 := \Gamma$ por hipótesis es consistente.

HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN: Suponga que Γ_n es consistente. Si $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$, por construcción Γ_{n+1} es consistente, luego no habría nada a probar. Si $\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$ es inconsistente, por construcción $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$.

Si $\Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$ es inconsistente también, dada cualquier fórmula bien formada α tendríamos que $\Gamma_n \cup \{\alpha_n\} \vdash \alpha$ y $\Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\} \vdash \alpha$; por el Teorema de la Deducción tendríamos que $\Gamma_n \vdash \alpha_n \to \alpha$ y $\Gamma_n \vdash \neg\alpha_n \to \alpha$, es decir $\Gamma_n \vdash \neg\alpha_n \vee \alpha$ y $\Gamma_n \vdash \neg\neg\alpha \vee \alpha$ (Convención). Por la regla de cortado, $\Gamma_n \vdash \alpha \vee \alpha$ y por contracción $\Gamma_n \vdash \alpha$; como α era arbitraria entonces Γ_n sería inconsistente (Contradicción). Luego en este caso, si $\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$ es inconsistente, $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$ debe ser consistente.

(b) Sea α fórmula bien formada, luego existe $n \in \omega$ tal que $\alpha = \alpha_n$. Por construcción, si $\alpha = \alpha_n \notin \Gamma_\omega$ entonces $\alpha_n \notin \Gamma_{n+1}$ y por tanto $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$ y así $\neg\alpha_n = \neg\alpha \in \Gamma_\omega$.
No se da el caso de que α_n y $\neg\alpha_n$ están simultáneamente en Γ_ω ya que en caso contrario existiría $k \in \omega$ tal que $\alpha_n, \neg\alpha_n \in \Gamma_k$, luego $\Gamma_k \vdash \alpha_n \wedge \neg\alpha_n$ (¿PORQUÉ?) y por tanto sería inconsistente (contradice (a)).

(c) Nótese que $\Gamma =: \Gamma_0 \subseteq \Gamma_\omega$ y que Γ_ω es consistente (¿PORQUÉ?). Si existiera $\Gamma' \supseteq \Gamma$ consistente tal que $\Gamma_\omega \subsetneq \Gamma'$, tome $\alpha \in \Gamma' \setminus \Gamma_\omega$, existe $n \in \omega$ tal que $\alpha = \alpha_n$, como $\alpha_n \notin \Gamma_\omega$ entonces por construcción $\neg\alpha_n \in \Gamma_\omega$ (¿PORQUÉ?), luego como $\Gamma_\omega \subsetneq \Gamma'$ entonces $\neg\alpha_n \in \Gamma'$. Así, $\alpha_n, \neg\alpha_n \in \Gamma'$ y Γ' sería inconsistente (Contradicción).

$\boxed{2}$ ($\Rightarrow$) Visto en clase (consultar sus notas de clase).

($\Leftarrow$) Si un conjunto de fórmulas bien formadas Γ es satisfactible, es finitamente satisfactible (¿POR QUÉ?).

Supongamos que existe Γ conjunto de fórmulas bien formadas finitamente satisfactible que NO es satisfactible. Como Γ NO es satisfactible, $\Gamma \models \alpha$ para toda fórmula bien formada α (¿POR QUÉ?), incluso si α es una contradicción. Tomando α contradicción, $\Gamma \models \alpha$. Por (b), existiría $\Gamma_0 \subseteq_{\text{finito}} \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \models \alpha$. Pero como Γ es finitamente satisfactible, existiría v valuación tal que $v(\beta) = 1$ para todo $\beta \in \Gamma_0$. Como $\Gamma_0 \models \alpha$ y v satisface Γ_0, entonces $v(\alpha) = 1$ (contradice que α es contradicción). Luego por reducción al absurdo, si Γ es finitamente satisfactible entonces Γ es satisfactible $\square$

$\boxed{3}$ Supongamos que Γ satisface que PARA v valuación, existe $\alpha_v \in \Gamma$ tal que $v(\alpha_v) = 1$.

Por reducción al absurdo, si DADOS $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ ($n \in \omega$) $\alpha_0 \vee \ldots \vee \alpha_n$ NO es tautología, existiría v valuación tal que $v(\alpha_0 \vee \ldots \vee \alpha_n) = 0$, luego $v(\neg\alpha_i) = 0$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ (¿POR QUÉ?) y por tanto $v(\neg\alpha_i) = 1$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ (¿POR QUÉ?)

Así, definiendo $\Gamma^* := \{\neg\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ tendríamos que Γ^* es finitamente satisfactible (¿POR QUÉ?), luego por el Teorema de Compacidad Γ^* sería satisfactible; esto dice que existiría una valuación v tal que $v(\neg\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Gamma$; es decir, $v(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \Gamma$ (CONTRADICE LA HIPÓTESIS). $\square$