UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA (SEDE BOGOTÁ)

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS GRUPOS 1, 2, 3 y 4.

TALLER 8 11-XI-2015

(1) Si $A := \{a, b, c, d, e\}$ defina en A una relación que sea:

a) Reflexiva y simétrica. b) Reflexiva y transitiva pero no simétrica.

c) Simétrica y transitiva. d) Reflexiva, simétrica, transitiva y antisimétrica.

e) De equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva)

f) De orden (reflexiva, antisimétrica y transitiva)

(2) Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas, justificando su respuesta:

a) Si R es una relación en $A \neq \emptyset$ simétrica y transitiva, entonces es reflexiva en A.

b) Una relación R definida en $A \neq \emptyset$ es simétrica si y sólo si $R^{-1} \subseteq R$.

c) Una relación R definida en $A \neq \emptyset$ es transitiva si y sólo si $R \circ R \subseteq R$.

d) Si R es una relación en $A \neq \emptyset$ antisimétrica, entonces es reflexiva en A.

e) Si R es una relación en $A \neq \emptyset$ simétrica y antisimétrica, entonces es reflexiva en A.

f) Si R y S son reflexivas en $A \neq \emptyset$, entonces $R \cup S$ es reflexiva en A.

g) Si R y S son reflexivas en $A \neq \emptyset$, entonces $R \cap S$ es reflexiva en A.

h) Si R y S son reflexivas en $A \neq \emptyset$, entonces $R - S$ es reflexiva en A.

i) Si R y S son reflexivas en $A \neq \emptyset$, entonces $R \triangle S$ es reflexiva en A.

j) Si R y S son reflexivas en $A \neq \emptyset$, entonces $S \circ R$ es reflexiva A.

(3) Sea f una función de A en B, en A definimos aRb si y sólo si $f(a) = f(b)$.

a) Demuestre que R es una relación de equivalencia en A.

b) Para cada una de las funciones que aparecen a continuación dé dos clases de equivalencia y la partición determinada por R.

i) $A = B = \mathbb{R}$ y $f(x) = x^2$.

ii) $A = B = \mathbb{N}$ y $f(n)$ se define como el residuo de dividir a n por 7.

iii) $A = \mathbb{R}^2$, $B = \mathbb{R}$ y $f((x, y)) = x$.

iv) $A = \wp(X)$ donde X es un conjunto con n elementos para algún $n \in \mathbb{N}$, $B := \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq n\}$ y $f(Y) = |Y|$ (donde $|Y|$ es el número de elementos de Y).

(4) Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Demuestre o dé un contraejemplo según el caso.

a) Si una relación R **no es reflexiva** existe una relación R^* que contiene a R que sí lo es.

b) Si una relación R **no es simétrica** existe una relación R^* que contiene a R que sí lo es.

c) Si una relación R **no es antisimétrica** existe una relación R^* que contiene a R que sí lo es.

d) Si una relación R **no es transitiva** existe una relación R^* que contiene a R que sí lo es.

e) Si R_1 y R_2 son transitivas entonces $R_1 \cup R_2$ es transitiva.

f) Existen relaciones que son simétricas y antisimétricas.

(5) En cada caso decida si la relación dada es de equivalencia o no. En el caso de serlo dé tres clases de equivalencia diferentes y la partición que ella determina.

a) En $\mathbb{Z}$ se define aR_1b si y sólo si $|a| = |b|$.

b) En $\mathbb{Z}$ se define aR_2b si y sólo si $a = |b|$.

c) En $A := \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 15\}$ se define aRb si y sólo si a y b tienen el mismo número de divisores.

d) En $\mathbb{R}^2$, $(a, b)R(c, d)$ si y sólo si $b = d$.

e) En $\mathbb{R}^2$, considere $(a, b)R(c, d)$ si y sólo si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

f) En $\mathbb{R} - \{0\}$, $x R\, y$ si y sólo si $xy > 0$.

(6) Para las relaciones de equivalencia que encontró en el punto (5) describa el conjunto cociente y si es posible determine cuántos elementos tiene.

(7) Una relación R en un conjunto A se dice **circular** si para todo x, y, z en A se tiene que xRy y yRz implica zRx.

a) En $A := \{a, b, c, d, e\}$ defina una relación S que sea circular y una relación R que sea reflexiva y circular.

b) Muestre que si una relación R es reflexiva y circular en A entonces R es de equivalencia en A.

c) ¿La recíproca del enunciado b) será válida?

(8) En cada caso dé el conjunto A del cual P es partición y, si es posible, la relación de equivalencia que determina P en A. (Note dicha relación por R_P)

a) $P = \{\{a, b\}.\{c, d\}, \{e\}\}$ b) $P = \{\{0\}, \{2\}, \{1, 3, 4\}, \{5, 6\}\}$

c) $P = \{\{0, 2, 6, 8\}, \{1, 4, 5, 9\}, \{3, 7\}\}$ d) $P = \{[0, 3), [3, 10], (10, \infty)\}$

e) $P = \{[m, m + 1) \mid m \in \mathbb{Z}\}$

f) $P = \{\{0, 5, 10, 15, ...\} , \{1, 6, 11, 16, ...\} , \{2, 7, 12, 17, ...\} , \{3, 8, 13, 18, ...\} , \{4, 9, 14, 19, ...\}\}$

(9) Resuelva los siguientes ejercicios del texto guía Bloch (edición 2011):

6.5.1 al 6.5.11
6.6.1 al 6.6.4
6.7.1 (1) al (9) excepto (5), y 6.7.4