UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PARCIAL 2 FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS GRUPO 3

Profesor: Pedro Zambrano
abril 20 de 2.017

ESTE DOCUMENTO ES APENAS UNA GUÍA, NO ES LA ÚNICA MANERA DE RESOLVER ESTE PARCIAL Y NO PRESENTA MUCHOS DETALLES QUE USTEDES DEBIERON HABER LLENADO.

1. [**0.5 puntos**] Decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifique completamente su respuesta.

   (a) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ para cualquier conjunto A.
   Respuesta: Verdadero. Puesto que para todo conjunto A se tiene que $\emptyset \subseteq A$, por definición de conjunto potencia tenemos que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.

   (b) Existen conjuntos A y B tales que $A \in B$ y $A \subseteq B$.
   Respuesta: Verdadero. Tome $A := \{1\}$ y $B := \{1, \{1\}\}$. $A := \{1\}$ es elemento de B y $A \subseteq B$ ya que si $x \in A$ entnces $x = 1$ y $x = 1 \in B$.

   (c) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) - \{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset\}$.
   Respuesta: Verdadero. Sea $X \in \mathcal{P}(\{\emptyset\}) - \{\{\emptyset\}\}$, luego por definición de diferencia entre conjuntos y como $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ **(¿por qué?)**, entonces $X = \emptyset$ o $X = \{\emptyset\}$ pero $X \notin \{\{\emptyset\}\}$ (es decir, $X \neq \{\emptyset\}$), por lo tanto como $X = \emptyset$ o $X = \{\emptyset\}$ y $X \neq \{\emptyset\}$, entonces $X = \emptyset$; el único elemento de $\{\emptyset\}$ es $\emptyset$, por lo tanto $X \in \{\emptyset\}$. Como todo elemento de $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) - \{\{\emptyset\}\}$ es elemento de $\{\emptyset\}$, por definición de contenencia entre conjuntos tenemos que $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) - \{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset\}$.

   (d) $\{\emptyset\} = \{\}$.
   Respuesta: Falso. $\{\emptyset\}$ tiene un elemento -$\emptyset$- y $\emptyset \notin \{\}$ ($\{\}$ es el conjunto vacío, luego no tiene elementos, luego por definición de contenencia entre conjuntos $\{\emptyset\} \not\subseteq \{\}$. Por lo tanto, por definición de igualdad entre conjuntos $\{\emptyset\} \neq \{\}$.

2. [**1.5 puntos**] En los siguientes enunciados, determine claramente las hipótesis y la conclusión. Demuestre o refute según el caso. En caso que la afirmación sea verdadera, indique claramente qué estrategia de demostración va a emplear.

   (a) Si $n \in \mathbb{Z}$ entonces $n^2 + n$ es par.
   Respuesta: Hipótesis: $n \in \mathbb{Z}$.
   Conclusión: $n^2 + n$ es par.
   Estrategia a usar: Como cualquier entero es par o impar, debemos hacer una demostración por casos.
   Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Como todo entero es par o impar, debemos considerar dos casos:
   CASO 1: si $n \in \mathbb{Z}$ es par, por definición de número par existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} n^2 + n &= (2k)^2 + (2k) \text{ (reemplazando)} \\ &= (2k)(2k) + 2k \text{ (definición de potencia de un entero)} \\ &= (2k)(2k) + (2k) \cdot 1 \text{ (1 es neutro de } \cdot \text{ en } \mathbb{Z}) \\ &= (2k)[2k+1] \text{ (distributividad de } \cdot \text{ con respecto a } + \text{ en } \mathbb{Z}) \\ &= 2[k(2k+1)] \text{ (asociatividad de } \cdot \text{ en } \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Como $2, k, 1 \in \mathbb{Z}$, por la cerradura de $+$ y $\cdot$ en $\mathbb{Z}$, $k(2k+1) \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, por definición de número par se tiene que $n^2 + n$ es par.

CASO 2: si $n \in \mathbb{Z}$ es impar, por definición de potencia de enteros tenemos que $n^2 = n \cdot n$. Como producto de impares es impar (visto en clase), entonces n^2 es impar. Como n^2 y n son impares, y como suma de impares es par (visto en clase), entonces $n^2 + n$ es par.

En cualquier caso (sea n par o sea impar) hemos demostrado que $n^2 + n$ es par, luego esta afirmación se tiene para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Sean $m, n \in \mathbb{Z}$. Si $3 \nmid m \cdot n$ entonces $3 \nmid m$ y $3 \nmid n$.
Respuesta: Hipótesis: $m, n \in \mathbb{Z}$ y $3 \nmid m \cdot n$.
Conclusión: $3 \nmid m$ y $3 \nmid n$.
Estrategia a usar: contrarrecíproca (combinado con una demostración por casos).
Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que no se tenga que $3 \nmid m$ y $3 \nmid n$, luego se tiene que $3 \mid m$ o $3 \mid n$ **(¿por qué?)**. Aquí tenemos que hacer una demostración por casos.

CASO 1: si $3 \mid m$, por definición de divisibilidad existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 3k$, luego

$$\begin{aligned} m \cdot n &= (3k) \cdot n \text{ (reemplazando)} \\ &= 3(kn) \text{ (asociatividad de } \cdot \text{ en } \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Como $k, n \in \mathbb{Z}$, por cerradura de $\cdot$ en $\mathbb{Z}$ tenemos que $k \cdot n \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto por definición de divisibilidad en $\mathbb{Z}$ tenemos que $3 \mid mn$.

CASO 2: si $3 \mid n$, por definición de divisibilidad existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 3k$, luego

$$\begin{aligned} m \cdot n &= m \cdot (3k) \text{ (reemplazando)} \\ &= (3k) \cdot m \text{ (conmutatividad de } \cdot \text{ en } \mathbb{Z}) \\ &= 3(km) \text{ (asociatividad de } \cdot \text{ en } \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Como $k, m \in \mathbb{Z}$, por cerradura de $\cdot$ en $\mathbb{Z}$ tenemos que $k \cdot m \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto por definición de divisibilidad en $\mathbb{Z}$ tenemos que $3 \mid mn$.

Por lo tanto, hemos demostrado que si $3 \mid m$ o $3 \mid n$, entonces $3 \mid mn$.

(c) Si $A, B \subseteq U$ son conjuntos (con U conjunto de referencia), entonces $A \cap (B - A) = \emptyset$.
Respuesta: Hipótesis: A y B son conjuntos.
Conclusión: $A \cap (B - A) = \emptyset$.
Estrategia a usar: reducción al absurdo.
Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $A \cap (B - A) \neq \emptyset$, luego existiría $x \in A \cap (B - A)$. Por definición de intersección entre conjuntos, $x \in A$ y $x \in B - A$. Por definición de diferencia entre conjuntos, $x \in B$ y $x \notin A$. En particular tenemos que $x \notin A$,lo cual es una contradicción, puesto que habíamos visto que $x \in A$. Por lo tanto $A \cap (B - A) = \emptyset$.

(d) Sean $A \neq \emptyset$, B, C conjuntos. $A \times B \subseteq A \times C$, si y sólo si, $B \subseteq C$.
Respuesta: Esta afirmación corresponde a un bicondicional, luego tenemos que analizar dos condicionales.
($\Leftarrow$): Hipótesis: $A \neq \emptyset$, B, C son conjuntos tales que $B \subseteq C$.
Conclusión: $A \times B \subseteq A \times C$.
Estrategia a usar: demostración directa.
Demostración. Sea $x \in A \times B$, luego por definición de producto cartesiano existen $a \in A$ y $b \in B$ tales $x = (a, b)$. Por hipótesis $B \subseteq C$, y como $b \in B$ entonces por definición de contenencia entre conjuntos tenemos que $b \in C$. Como $x = (a, b)$ donde $a \in A$ y $b \in C$, por definición de producto cartesiano tenemos que $x = (a, b) \in A \times C$. Como todo elemento de $A \times B$ es elemento de $A \times C$, por definición de contenencia entre conjuntos tenemos que $A \times B \subseteq A \times C$.

($\Rightarrow$) Hipótesis: $A \neq \emptyset$, B, C son conjuntos tales que $A \times B \subseteq A \times C$.
Conclusión: $B \subseteq C$.
Estrategia a usar: demostración directa.
Definición. Sea $b \in B$, como por hipótesis $A \neq \emptyset$ existe $a \in A$. Como $a \in A$ y $b \in B$, por definición de producto cartesiano tenemos que $(a, b) \in A \times B$. Por hipótesis tenemos que $A \times B \subseteq A \times C$, y puesto que $(a, b) \in A \times B$ por definición de contenencia entre conjuntos tenemos que $(a, b) \in A \times C$. Como $(a, b) \in A \times B$, por definición de producto cartesiano tenemos que $a \in A$ y $b \in C$, en particular tenemos que $b \in C$. Así, todo elemento de B es elemento de C, luego por definición de contenencia entre conjuntos tenemos que $B \subseteq C$.

3. [**1.5 puntos**] Demuestre o refute con un contrajemplo , justificando completamente su respuesta:

(a) Dados A, B, C conjuntos, $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
Respuesta: Verdadero. Sea $x \in (A \cup B) \times C$, luego por definición de producto cartesiano de conjuntos existen $a \in A \cup B$ y $b \in C$ tales que $x = (a, b)$. Como $a \in A \cup B$, por definición de unión entre conjontos tenemos que $a \in A$ o $a \in B$. Si $a \in A$, como $b \in C$ entonces por definición de producto cartesiano tenemos que $x = (a, b) \in A \times C$. Como $A \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$ **(¿por qué?)**, por definición de contenencia entre conjuntos tenemos que $x = (a, b) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.
Si $a \in B$, como $b \in C$ entonces por definición de producto cartesiano tenemos que $x = (a, b) \in B \times C$. Como $B \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$ **(¿por qué?)**, por definición de contenencia entre conjuntos tenemos que $x = (a, b) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

En cualquier caso, $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Como todo elemento de $(A \cup B) \times C$ es elemento de $(A \times C) \cup (B \times C)$, por definición de contenencia entre conjuntos tenemos que $(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$.
Sea $x \in (A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$, luego por definición de unión entre conjuntos tenemos que $x \in A \times C$ o $x \in B \times C$. Si $x \in A \times C$, por definición de producto cartesiano tenemos que existen $a \in A$ y $b \in C$ tales que $x = (a, b)$. Como $a \in A$ y $A \subseteq A \cup B$ **(¿por qué?)**, entonces $a \in A \times B$; como además $b \in C$ entonces $x = (a, b) \in (A \cup B) \times C$.
Si $x \in B \times C$, por definición de producto cartesiano tenemos que existen $a \in B$ y $b \in C$ tales que $x = (a, b)$. Como $a \in B$ y $B \subseteq A \cup B$ **(¿por qué?)**, entonces $a \in A \times B$; como además $b \in C$ entonces $x = (a, b) \in (A \cup B) \times C$.
En cualquier caso, $x \in (A \cup B) \times C$. Por lo tanto, como todo elemento de $(A \times C) \cup (B \times C)$ es elemento de $(A \cup B) \times C$, por definición de contenencia entre conjuntos tenemos que $(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$.
Como $(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$ y $(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$, por definición de igualdad entre conjuntos tenemos que $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(b) Dados A, B conjuntos, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
Respuesta: Falso. Contraejemplo: Tome $A := \{1\}$ y $B := \{2\}$. Nótese que $A \cup B = \{1, 2\}$, luego $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Además tenemos que $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$ y $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$, por lo tanto $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. Nótese que $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \nsubseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ **(¿por qué?)**, luego por la definición de igualdad entre conjuntos tenemos que $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

(c) Definiendo $A_n := (-\frac{3}{n}, \pi + \frac{1}{n^3})$ para cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} A_n = (0, \pi]$.
Respuesta: Falso. Contraejemplo: Nótese que $0 \in (-\frac{3}{n}, \pi + \frac{1}{n^3})$ para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ **(¿por qué?)** (USE definición de intervalo para justificarlo), luego $0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} A_n$ **(¿por qué?)**; pero $0 \notin (0, \pi]$ **(¿por qué?)**, por lo tanto por definición de contenencia entre conjuntos tenemos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} A_n \nsubseteq (0, \pi]$ y por lo tanto, por definición de igualdad entre conjuntos, tenemos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} A_n \neq (0, \pi]$.

(d) Definiendo $A_n := [\sqrt{2} + \frac{1}{n^2}, 7 - \frac{2}{n^4})$ para cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} A_n = [\sqrt{2}, 7)$.
Respuesta: Falso. Contraejemplo: Nótese que $\sqrt{2} \notin [\sqrt{2} + \frac{1}{n^2}, 7 - \frac{2}{n^4})$ para ningún $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ **(¿por qué?)** (USE definición de intervalo para justificarlo), luego $\sqrt{2} \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} A_n$ **(¿por qué?)**; pero $\sqrt{2} \in [\sqrt{2}, 7)$ **(¿por qué?)**. Por lo tanto, por definición de contenencia entre conjuntos $[\sqrt{2}, 7) \nsubseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} A_n$, y por definición de igualdad entre conjuntos tenemos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} A_n \neq [\sqrt{2}, 7)$.

4. **[1.5 puntos]** Considere la siguiente relación definida en el conjunto $A := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$\text{Para todo } m, n \in \mathbb{N}, \quad m\mathcal{R}n \text{ si y sólo si } n = 2m - 1.$$

(a) Encuentre, si es posible, tres parejas en $A \times A$ que pertenezcan a la relación y tres parejas en $A \times A$ que no pertenezcan a la relación, justificando su respuesta.
Respuesta: $(1, 1) \in \mathcal{R}$ ya que $1 = 2(1) - 1$, $(2, 3) \in \mathcal{R}$ ya que $3 = 2(2) - 1$ y $(3, 5) \in \mathcal{R}$ ya que $5 = 2(3) - 1$. $(0, 2) \notin \mathcal{R}$ ya que $2 \neq -1 = 2(0) - 1$, $(0, 3) \notin \mathcal{R}$ ya que $3 \neq -1 = 2(0) - 1$ y $(1, 4) \notin \mathcal{R}$ ya que $4 \neq 1 = 2(1) - 1$.

(b) Determine el dominio y el rango de R, justificando su respuesta.
Respuesta: Nótese que $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7),(5,9)\}$ **(¿por qué?)**, luego $dom(\mathcal{R}) = \{1,2,3,4,5\}$ **(¿por qué?)** y $rango(\mathcal{R}) = \{1,3,5,7,9\}$ **(¿por qué?)**.

(c) Dé una descripción de la relación $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$, justificando su respuesta.
Respuesta: Como $(1,1),(1,1) \in \mathcal{R}$, entonces $(1,1) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$. Como $(2,3),(3,5) \in \mathcal{R}$, entonces $(2,5) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$. Como $(3,5),(5,9) \in \mathcal{R}$, entonces $(3,9) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$. Ninguna otra pareja pertenece a $\mathcal{R}$ ya que a pesar que $(4,7),(5,9) \in \mathcal{R}$, $7 \notin dom(\mathcal{R})$ y $9 \notin dom(\mathcal{R})$. Por lo tanto $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(1,1),(2,5),(3,9)\}$.